

BÀI TẬP

1. Cho hình cầu có đường kính $d = 3.7 \pm 0.05$. Tìm sai số tuyệt đối, tương đối của thể tích hình cầu V và diện tích mặt cầu S , biết $\pi = 3.14$ với $\Delta_\pi = 0,0016$.

Hướng dẫn. Cho hàm $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Khi đó,

- Sai số tuyệt đối: $\Delta_y = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta x_i$.
- Sai số tương đối: $\delta_y = \frac{\Delta y}{y} = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial}{\partial x_i} \ln f \right| \Delta x_i$ (%), trong đó $x_i, \Delta x_i$ là giá trị gần đúng và sai số tuyệt đối của x_i , tương ứng.
- Thể tích hình cầu: $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{6}\pi d^3$, diện tích mặt cầu: $S = 4\pi r^2 = \pi d^2$, trong đó $d = 2r$, và r là bán kính.

2. Cho hình chữ nhật có chiều dài $a = 1.0251 \pm 0.002 \text{ cm}$ và chiều rộng $b = 0.8067 \pm 0.001 \text{ cm}$. Tính sai số tuyệt đối, tương đối của diện tích và chu vi của hình chữ nhật.

Hướng dẫn. Diện tích hình chữ nhật $S = ab$, chu vi $P = 2(a + b)$.

3. Cho hình hộp chữ nhật có chiều cao $c = 3.4321 \pm 0.001 \text{ m}$ và đáy là hình chữ nhật với các cạnh $a = 1.015 \pm 0.003 \text{ m}$ và $b = 2.215 \pm 0.02 \text{ m}$. Tính sai số tuyệt đối, sai số tương đối của thể tích và diện tích toàn phần của hình hộp.

Hướng dẫn. Thể tích hình hộp $V = abc$, diện tích toàn phần $S = 2(ab + bc + ca)$.

4. Cho đa thức $P(x) = 3x^5 - 2x^3 + x + 1$. Dùng sơ đồ Horner để tìm

a) $P(4)$; b) $P(Y + 3)$, $P^{(i)}(3)$, $0 \leq i \leq 5$; (c) $P(Y - 4)$, $P^{(i)}$, $0 \leq i \leq 5$.

Hướng dẫn. Sơ đồ Horner

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \text{Đặt } p_0 = a_0 \\ &p_1 = a_0c + a_1 = p_0c + a_1 \\ &p_2 = p_1c + a_2 \\ &\dots\dots\dots \\ &p_n = p_{n-1}c + a_n = p(c) \end{aligned}$$

Sơ đồ Horner

a_0	a_1	a_2	$\dots$	a_{n-1}	a_n
	$p_0 \cdot c$	$p_1 \cdot c$	$\dots$	$p_{n-2} \cdot c$	$p_{n-1} \cdot c$
p_0	p_1	p_2	$\dots$	p_{n-1}	$p_n = p(c)$

Sơ đồ Horner tổng quát

a_0	a_1	a_2	$\dots$	a_{n-1}	a_n
	$p_0 \cdot c$	$p_1 \cdot c$	$\dots$	$p_{n-2} \cdot c$	$p_{n-1} \cdot c$
p_0	p_1	p_2	$\dots$	p_{n-1}	$p_n = p(c) = b_n$
	$p_0' \cdot c$	$p_1' \cdot c$	$\dots$	$p_{n-2}' \cdot c$	
p_0'	p_1'	p_2'	$\dots$	$p_{n-1}' = p_1'(c) = b_{n-1}$	
$\dots$	$\dots$				

Hơn nữa, $b_{n-i} = P_i(c)$ và $\boxed{P^{(i)}(c) = i!b_{n-i}}$.

5. Tính các tỷ sai phân của hàm số $y = f(x)$ với bảng giá trị

x	-1	3	4	7	8
$y = f(x)$	0	-3	3	1	2

6. Tính các sai phân của hàm số $y = f(x)$ với bảng giá trị

x	-1	1	3	5	7
$y = f(x)$	1	-3	2	1	4

7. Xây dựng đa thức nội suy Lagrange của hàm số $y = f(x)$ với bảng giá trị sau

x	-1	1	3	5
$y = f(x)$	1	-3	2	1

và tính gần đúng $f(0.5)$.

8. Xây dựng đa thức nội suy Lagrange của hàm số $y = f(x)$ với bảng giá trị sau

x	-1	3	4
$y = f(x)$	2	-3	3

và tính gần đúng $f(2.5)$.

Hướng dẫn. Đa thức nội suy Lagrange với các mốc nội suy $(x_i, y_i), 0 \leq i \leq n$ được cho bởi

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(\widehat{x-x_{i+1}})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)},$$

trong đó $(\widehat{x-x_{i+1}})$ nghĩa là $x-x_{i+1}$ không xuất hiện.

9. Tìm đa thức nội suy Newton tiến $P^f(x)$ và Newton lùi $P_b(x)$ của hàm số $y = f(x)$ với bảng các mốc nội suy sau

x	-1	0	4	5
$y = f(x)$	1	-3	1	2

và dùng đa thức nội suy cho mỗi trường hợp để tính gần đúng $f(2)$.

Hướng dẫn. Cho các mốc nội suy $(x_i, y_i), 0 \leq i \leq n$ của hàm $y = f(x)$. Khi đó,

- Đa thức nội suy Newton tiến xuất phát từ x_0 được cho bởi

$$P_n(x) = y_0 + (x-x_0)f[x_0, x_1] + (x-x_0)(x-x_1)f[x_0, x_1, x_2] + \dots + (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})f[x_0, x_1, \dots, x_n],$$

trong đó $f[x_0, x_1, \dots, x_i], 1 \leq i \leq n$, là tỷ sai phân cấp i .

- Đa thức nội suy Newton lùi xuất phát từ x_n được cho bởi

$$P_n(x) = y_n + (x-x_n)f[x_n, x_{n-1}] + (x-x_n)(x-x_{n-1})f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}] + \dots + (x-x_n)(x-x_{n-1})\dots(x-x_1)f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_0],$$

trong đó $f[x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-i}], 1 \leq i \leq n$, là tỷ sai phân cấp i .

10. Tìm đa thức nội suy Newton tiến $P^f(x)$ và Newton lùi $P_b(x)$ của hàm số $y = f(x)$ với bảng các mốc nội suy sau

x	-1	0	2	4	5
$y = f(x)$	1	-2	-3	1	2

và dùng đa thức nội suy cho mỗi trường hợp để tính gần đúng $f(1)$.

11. Dùng đa thức nội suy của hàm số $y = f(x)$ tính được trong câu 7, 8, 9, 10 để tính gần đúng đạo hàm của nó tại $x = 1$.

12. Dùng phương pháp hình thang và phương pháp Simpson (parabol) để tính giá trị gần đúng và đánh giá sai số của các tích phân sau với 10 đoạn chia.

$$\text{a) } I = \int_1^2 \frac{dx}{x}, \quad \text{b) } I = \int_1^5 \frac{dx}{x+1}, \quad \text{c) } I = \int_{-1}^1 \frac{dx}{2x+3}, \quad \text{d) } I = \int_0^2 \frac{2x+2}{2x+3} dx.$$

Hướng dẫn. 1) Công thức hình thang

- $I \approx \frac{h}{2} (y_0 + 2(y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}) + y_n),$
- Sai số: $|r(x)| \leq \frac{Mnh^3}{12} = \frac{M(b-a)h^2}{12},$ trong đó h là cỡ bước và

$$M = \max_{[a,b]} |f''(x)|.$$

2) Công thức Simpson (parabol) với $2n$ đoạn chia

- $I \approx \frac{h}{3} (y_0 + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{2n-2}) + y_{2n}),$
- Sai số: $|r(x)| \leq \frac{Mnh^5}{90} = \frac{M(b-a)h^4}{180},$ trong đó h là cỡ bước và

$$M = \max_{[a,b]} |f^{(4)}(x)|.$$

13. Cho phương trình $x^3 + x - 1000 = 0$.

- Chứng minh $[9, 10]$ là khoảng phân ly nghiệm của phương trình.
- Tìm điểm Fourier của phương trình trên $[9, 10]$.
- Tính năm nghiệm gần đúng x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 của phương trình bằng phương pháp chia đôi, phương pháp tiếp tuyến, phương pháp dây cung, và phương pháp lặp đơn.
- Tính nghiệm gần đúng của phương trình bằng phương pháp tiếp tuyến và phương pháp lặp đơn với sai số không quá 0.02.

Hướng dẫn.

- Sai số của phương pháp chia đôi $\Delta_{x_n} = \frac{1}{2^{n+1}}(b-a).$
- Công thức nghiệm và sai số của phương pháp dây cung

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - d)}{f(x_n) - f(d)}, \quad \Delta_{x_n} = |x_n - x_{n-1}|,$$

trong đó

- $d = b$ và $x_0 = a$ nếu b là điểm Fourier;
- $d = a$ và $x_0 = b$ nếu a là điểm Fourier.

- Công thức nghiệm và sai số của phương pháp tiếp tuyến

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad \Delta_{x_n} = |x_n - x_{n-1}|,$$

trong đó

- $x_0 = a$ nếu a là điểm Fourier;
- $x_0 = b$ nếu b là điểm Fourier.
- Biến đổi phương trình về dạng $x = \phi(x)$, với $\max_{[a,b]} |\phi'(x)| = q < 1$. Khi đó, công thức nghiệm và sai số của phương pháp lặp đơn

$$x_n = \phi(x_{n-1}), \quad \Delta_{x_n} = \frac{q}{1-q} |x_n - x_{n-1}| = \frac{q^n}{1-q} |x_1 - x_0|,$$

trong đó $x_0 \in [a, b]$ tùy ý.

14. Cho phương trình $x^3 - 4x + 1 = 0$.

- Chứng tỏ $[1.5, 2]$, $[-2.5, -2]$ là các khoảng phân ly nghiệm của phương trình.
- Tìm điểm Fourier của phương trình trong mỗi khoảng phân ly nghiệm.
- Trong mỗi khoảng phân ly nghiệm, tính năm nghiệm gần đúng x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 của phương trình bằng phương pháp dây cung, phương pháp lặp đơn, và phương pháp tiếp tuyến.
- Trong mỗi khoảng phân ly nghiệm, tính nghiệm gần đúng của phương trình bằng phương pháp tiếp tuyến, phương pháp dây cung và phương pháp lặp đơn với sai số không quá 0.01.

15. Dùng phương pháp Jacobi, Seidel tìm bốn nghiệm xấp xỉ x^0, x^1, x^2, x^3 của các hệ phương trình sau.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad \begin{cases} 11x + y + z = 10, \\ 8x + 23y + 3z = 9, \\ x + 7y + 17z = 8. \end{cases} & \text{b)} \quad \begin{cases} 10x + 2y + z = 10, \\ x + 10y + 2z = 20, \\ x + y + 10z = 9. \end{cases} \end{array}$$

Hướng dẫn. Chuẩn vector $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|,$$

hay

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

Chuẩn ma trận $A = (a_{ij})_n$:

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|,$$

hay

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|,$$

Chuẩn được sử dụng sau đây hoặc $\|\bullet\|_1$ hoặc $\|\bullet\|_\infty$.

- Phương pháp lặp đơn (Jacobi): công thức lặp và sai số.

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g, \text{ chọn } x^{(0)} = g, k \geq 0,$$

$$\|x^{(k+1)} - x^*\| \leq \frac{\|B\|^{k+1}}{1 - \|B\|} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|,$$

hay

$$\|x^{(k+1)} - x^*\| \leq \frac{\|B\|}{1 - \|B\|} \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|.$$

- Phương pháp Seidel: công thức lặp và sai số.

$$x^{(k+1)} = (I - U)^{-1} (Lx^{(k)} + g), \text{ chọn } x^{(0)} = g, k \geq 0,$$

$$\|x^{(k+1)} - x^*\| \leq \frac{\|U\|}{1 - \|B\|} \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|,$$

trong đó

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \text{ và } L = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

16. Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp lặp đơn (Jacobi), phương pháp Seidel với sai số không quá 10^{-4} .

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad \begin{cases} 11x + y + z = 12, \\ 8x + 23y + 3z = 31, \\ x + 7y + 17z = 8. \end{cases} & \text{b)} \quad \begin{cases} 10x + 2y + z = 10, \\ x + 10y + 2z = 12, \\ x + y + 10z = 8. \end{cases} \end{array}$$

17. Cho phương trình vi phân

$$\begin{aligned} y' &= 2x - y, \quad 0 \leq x \leq 1, \\ y(0) &= 2. \end{aligned}$$

Tính năm nghiệm xấp xỉ y_0, y_1, y_2, y_3, y_4 của phương trình theo phương pháp Euler với $h = 0.1$.
Hướng dẫn. Công thức Euler

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad i \leq 4, \text{ và } y_0 = y(0).$$

18. Sử dụng phương pháp Euler cải tiến với $h = 0.25$ và sai số không quá 10^{-5} để tính nghiệm xấp xỉ của phương trình sau tại các điểm cho trước.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad \begin{cases} y' = 5x + y, & 0 \leq x \leq 1, \\ y(0) = 1. \end{cases} & \text{Tính } y(0.25). \\ \text{b)} \quad \begin{cases} y' = xy^2, & 1 \leq x \leq 2, \\ y(1) = 2. \end{cases} & \text{Tính } y(1.25). \end{array}$$

Hướng dẫn. Công thức Euler cải tiến

$$\begin{cases} y_{j+1}^0 = y_j + hf(x_j, y_j), \\ y_{j+1}^k = y_j + \frac{h}{2} (f(x_j, y_j) + f(x_{j+1}, y_{j+1}^k)), \quad k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Khi $|y_{j+1}^{k+1} - y_{j+1}^k| \leq \epsilon$ thì chọn $y_{j+1} = y_{j+1}^{k+1}$.

19. Sử dụng phương pháp Runge-Kutta bậc bốn để với $h = 0.25$ để tính nghiệm xấp xỉ của phương trình vi phân tại điểm cho trước.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad \begin{cases} y' = 3x + 2y, & \text{với } 0 \leq x \leq 1, \\ y(0) = -1. \end{cases} & \text{Tính } y(0.25). \\ \text{a)} \quad \begin{cases} y' = xy + 2y, & \text{với } 1 \leq x \leq 2, \\ y(1) = 2. \end{cases} & \text{Tính } y(1.25). \end{array}$$

Hướng dẫn. Công thức Runge-Kutta bậc bốn

$$k_1 = hf(x_0, y_0)$$

$$k_2 = hf\left(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = hf\left(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}k_2\right)$$

$$k_4 = hf(x_0 + h, y_0 + k_3)$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) + O(h^5)$$

KIỂM TRA 1

Trọng số: 30%.

Ngày nộp: 06/06/2020.

Câu 1 (5.0 điểm). Cho các số gần đúng $a = 8.763254$ và $b = 4.589216$, và mỗi số có năm chữ số chắc. Tìm sai số tuyệt đối và tương đối của biểu thức $S = a + b$.

Hướng dẫn. $\Delta_a \leq \frac{1}{2}10^{-4}$, $\Delta_b \leq \frac{1}{2}10^{-4}$.

Câu 2 (5.0 điểm). Cho hình hộp chữ nhật có chiều cao $c = 3.4321 \pm 0.001m$ và đáy là hình chữ nhật với các cạnh $a = 1.305 \pm 0.002m$ và $b = 2.115 \pm 0.0015m$. Tính sai số tuyệt đối, sai số tương đối của thể tích và diện tích toàn phần của hình hộp.

Câu 3 (5.0 điểm). Cho đa thức $P(x) = x^5 + 2x^3 - 3x^2 + x$. Áp dụng sơ đồ Horner, tìm $P(Y + 2)$ và $P^{(i)}(2)$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

Câu 4 (5.0 điểm). Cho hàm số $y = f(x)$ khả vi liên tục đến cấp ba. Bảng giá trị của hàm số tại các điểm tương ứng như sau

x	0	1	2	3
$y = f(x)$	4	8	13	16

Xây dựng đa thức nội suy Newton (lùi hoặc tiến) $P_3(x)$ của hàm $y = f(x)$. Tính gần đúng $f^{(i)}(1.5)$, $i = 0, 1, 2, 3$.

Câu 5 (5.0 điểm). Tính gần đúng tích phân $I = \int_0^1 \frac{dx}{x+3}$ theo công thức Simpson với $n = 10$ đoạn chia và đánh giá sai số của kết quả.

Câu 6 (5.0 điểm). Tính gần đúng tích phân $I = \int_0^1 \frac{dx}{x+3}$ theo công thức hình thang với $n = 10$ đoạn chia và đánh giá sai số của kết quả.